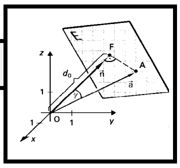
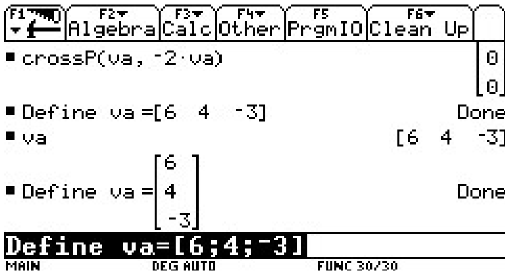
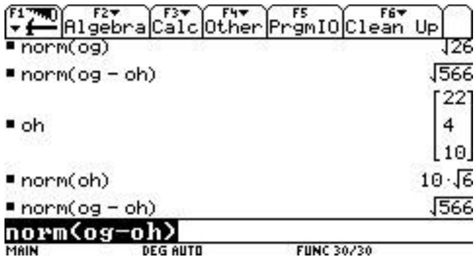


1. Vektoren

Vektoren lassen sich definieren in eckigen Klammern.
Setzt man ein Semikolon zwischen die einzelnen Komponenten, so ergibt sich ein Spaltenvektor. Ein Spaltenvektor kann man auch definieren durch [[a][b][c]].
Setzt man ein Komma zwischen die einzelnen Komponenten, ergibt sich ein Zeilenvektor.
Die Länge eines Vektors ist definiert als

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

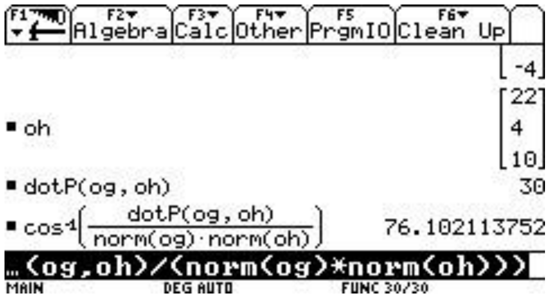




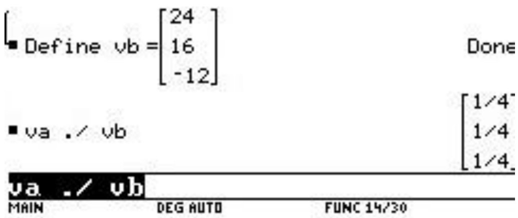
Der Abstand zweier Punkte ergibt sich als Länge des Differenzvektors:

$$d\left(A;B\right) = \sqrt{\left(b_1 - a_1\right)^2 + \left(b_2 - a_2\right)^2 + \left(b_3 - a_3\right)^2}$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren erhält man über dotP(Vektor1, Vektor2).
*An dieser Stelle sollte man darauf hinweisen, dass wir zur Bezeichnung des Skalarproduktes den Stern * verwenden, dass der Voyage aber den Stern für die Multiplikation verwendet!*
Der Winkel zwischen zwei Vektoren lässt sich mit der bekannten Definition berechnen, wenn man APPROX≈ anwendet und MODE DEGREE eingestellt hat.



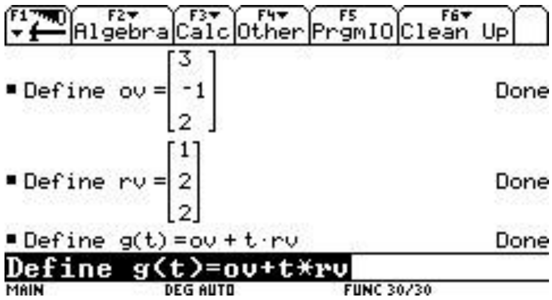
Die Kollinearität von Vektoren lässt sich mit dem Befehl „./“ (Punkt / geteilt durch) überprüfen. Möglich ist auch: „solve(va=k*vb,k)“.

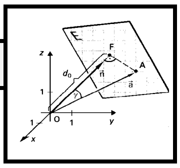


2. Geraden

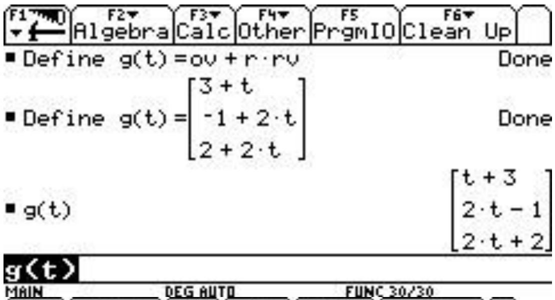
Für eine Gerade sind Orts- und Richtungsvektor zu definieren, wenn später auf diese zugegriffen werden soll.
Anschließend kann die Gerade als Funktion g(t)=ov + r*rv definiert werden.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; t \in \Re$$

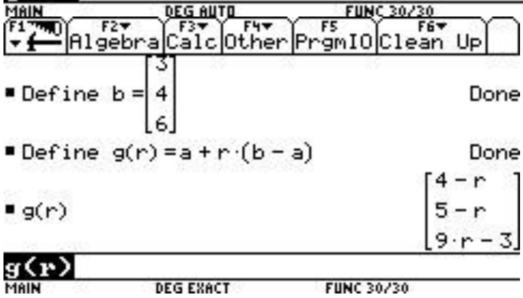




Werden Orts- und Richtungsvektoren anschließend nicht mehr gebraucht, kann die Gerade auch als Spaltenvektor mit einem Parameter definiert werden.



Sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definiert, so lässt sich die Gerade auch mit Hilfe der Zwei-Punkte-Form aufstellen



Untersuche die Lagebeziehung der Geraden

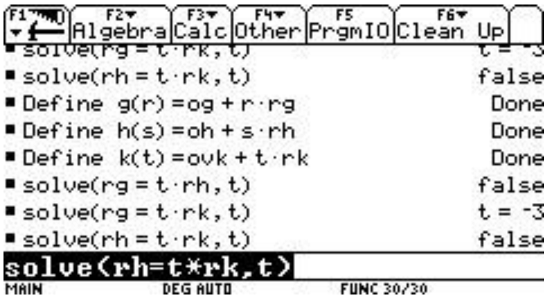
$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}6\\15\\-12\end{pmatrix};r\in\Re$$

$$h:\vec{x}=\begin{pmatrix}22\\4\\10\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}7\\1\\3\end{pmatrix};s\in\Re$$

$$k:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-8\\12\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\-5\\4\end{pmatrix};t\in\Re$$

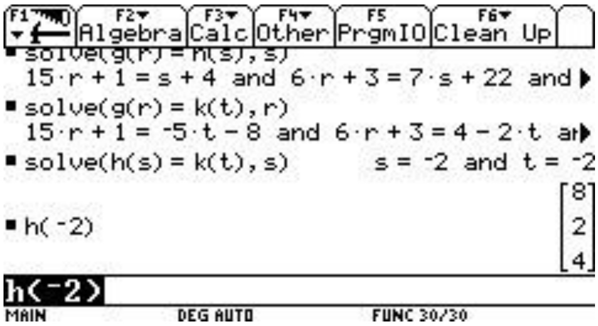
Achtung: Der Name ok ist vergeben!

Untersuchung der Richtungsvektoren auf Kollinearität ergibt: Die Richtungsvektoren von g und k sind zueinander kollinear, während der Richtungsvektor von h zu den beiden anderen nicht kollinear ist.

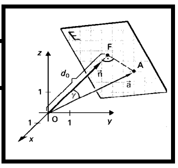


Die Untersuchung auf Schnittpunkte mit Hilfe des SOLVE-Befehls ergibt: g und h haben keine Schnittpunkte (erkennbar daran, dass der Voyage das LGS ausgibt), ebenso g und k. Dagegen besitzen h und k für s=-2 und t=-2 einen Schnittpunkt, der mit h(-2) berechnet werden kann.

Zusammenfassend folgt: g und h sind windschief, g und k sind parallel, h und k schneiden sich im Punkt (8|2|4).

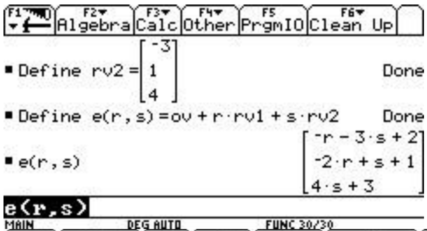


3. Ebenen

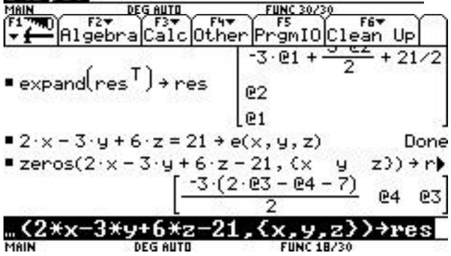


Ebenen in Parameterform werden wie Geraden definiert:

$$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix};r,s\in\Re$$



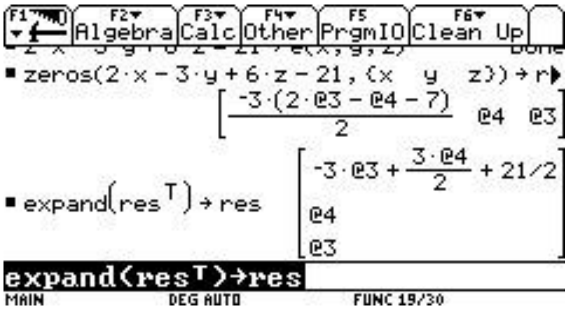
Ebenen in Koordinatenform können als Gleichung einer Funktion von drei Variablen x, y und z gespeichert werden.



Wird die zugehörige Parameterform gesucht, sind die Nullstellen der Koordinatenform zu bestimmen

Noch bequemer lässt sich die Parameterform ablesen, wenn der Spaltenvektor der Nullstellen gebildet wird.

Den Befehl zum Transponieren findet man unter MATH 4:Matrix 1^T

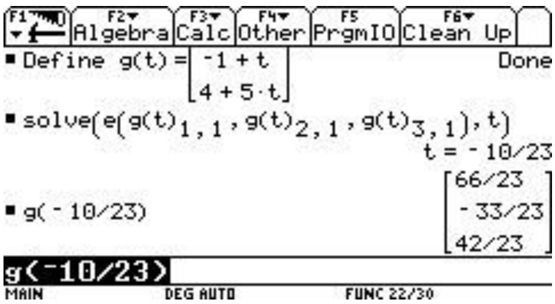


Die Parameterform lautet

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}\frac{21}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\1\\0\end{pmatrix};r,s\in\Re$$

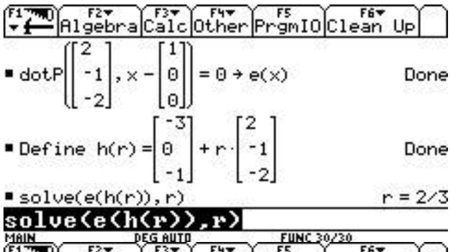
Der Schnittpunkt einer Gerade g(t) mit einer Ebene in Koordinatenform e(x,y,z) erhält man mittels

Solve(e(g(t)[1,1],g(t)[2,1],g(t)[3,1],t)

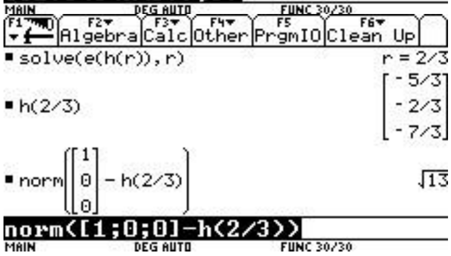


Auf die einzelnen Komponenten eines Spaltenvektors kann man zugreifen, indem der Index in eckigen Klammern hinzugefügt wird. Dabei steht der erste Index für die Zeile, der zweite für die Spalte.

Welchen Abstand hat der Punkt P (1|0|0) von der Geraden $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\0\\-1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix};r\in\Re$?



Die Normalenform der Lotebene durch P mit dem RV als Normalenvektor lässt sich als Gleichung e(x) abspeichern. Setzt man die Gerade h(r) in die Gleichung ein, lässt sich der Wert von r für den Schnittpunkt bestimmen.

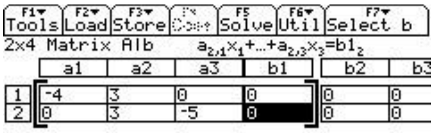


Die Länge des Differenzvektors ergibt den gesuchten Abstand.

4. Vektorprodukt

Gegeben ist die Ebene E mit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}; r, s \in \Re$$

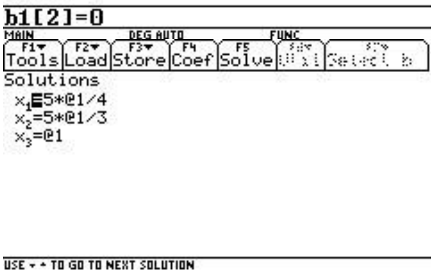


Für ihren Normalenvektor muss

$\vec{n} \perp \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ sein,

d.h. nach dem Orthogonalitätskriterium

$$-4n_1 + 3n_2 + 0n_3 = 0$$
$$0n_1 + 3n_2 - 5n_3 = 0$$



Dieses LGS wird mit dem Equation Solver gelöst

Die kleinste ganzzahlige Lösung erhalten wir, indem wir für x_3 den Hauptnenner der beiden Brüche einsetzen, also 12. Dann ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor für E.

Allgemein gilt: Gegeben sind die Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

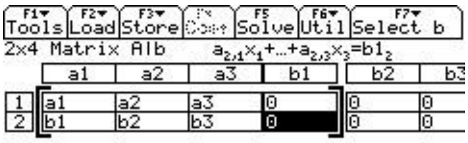
Gesucht ist der Vektor $\vec{x}$, der zu beiden Vektoren senkrecht ist.

Es muss gelten:

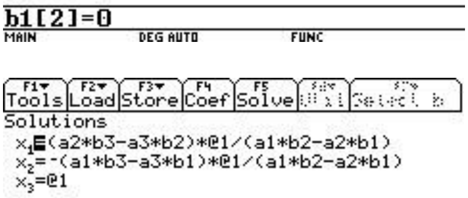
$\vec{a} * \vec{x} = 0$ und $\vec{b} * \vec{x} = 0$.

Die skalare Multiplikation führt auf das Gleichungssystem

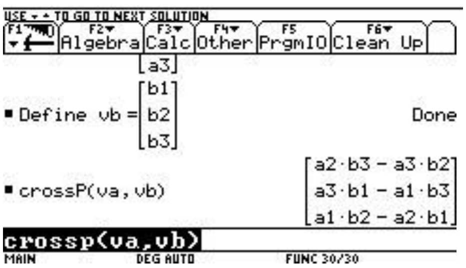
$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = 0$$
$$b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 = 0$$



Der Equation Solver liefert die nebenstehende Lösung. Für x_1 und x_2 ergeben sich jeweils Brüche mit dem Nenner $a_1b_2 - a_2b_1$. Für x_3 lassen sich beliebige Terme einsetzen. Die einfachste Lösung des Gleichungssystems ergibt sich mit $x_3 = a_1b_2 - a_2b_1$, weil dann auch für x_1 und x_2 ganzzahlige Lösungen entstehen.



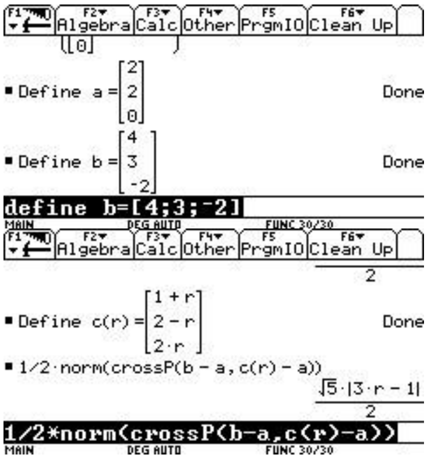
Damit ist das Vektorprodukt definiert und man überzeugt sich, dass die Funktion crossP im Voyage genau diese Definition umsetzt.



Die Länge des Vektorproduktes zweier Vektoren ist gleich der Fläche des von ihnen aufgespannten Parallelogramms.
Bespiel: Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck A(2|2|0), B (4|3|-2) und C_r (1+r|2-r|2r)?
Der gesuchte Flächeninhalt (in diesem Fall in Abhängigkeit von r) ergibt sich aus

$$\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\times\left(\vec{c}_r-\vec{a}\right)\right|:$$

$$A=\frac{\sqrt{5}\cdot|3r-1|}{2}$$

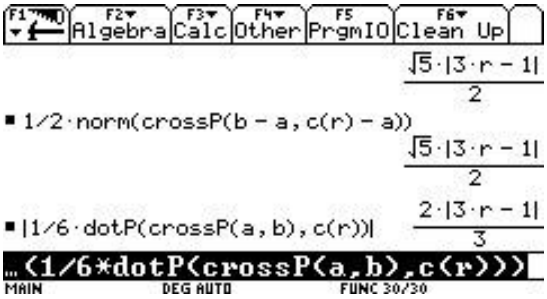


Bespiel: Welches Volumen hat die von A, B, C_r und dem Ursprung aufgespannte Pyramide?
Die Pyramide hat ein Sechstel des Volumens des Spats (da in diesem Fall die Grundfläche dreieckig ist, zählt nur die halbe Fläche des Parallelogramms) und für jede Pyramide gilt:

$$V=\frac{1}{3}\cdot G\cdot h$$

$$V=\frac{2\cdot|3r-1|}{3}$$

Das Spatprodukt gibt das Volumen der von den Vektoren a, b und c aufgespannten Spats an: $V=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)*\vec{c}\right|$.

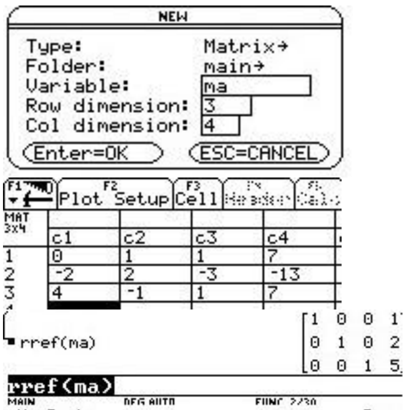


5. Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme lassen sich mit dem Befehl rref(Matrix) lösen. Beispiel:

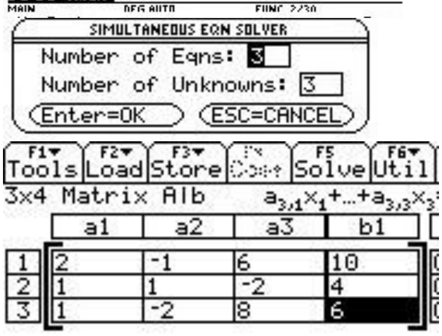
$$\begin{aligned} y+z &= 7\\ -2x+2y-3z &= -13\\ 4x-y+z &= 7 \end{aligned}$$

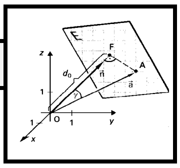
Die Matrizen definiert man am einfachsten mit dem Data-/Matrix-Editor. Dabei muss der Typ auf Matrix eingestellt werden!
In der doppelt referenzierten Matrix lässt sich die Lösungsmenge ablesen:
x=1, y=2; z=5.



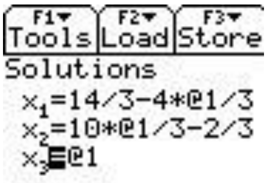
Alternativ kann man den Simulateous-Equation-Solver verwenden.
Der Vorteil hier ist, dass die Sonderfälle bei den Lösungsmengen (z.B. einparametrige Lösung) hier direkt angezeigt werden.
Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x-y+6z &= 10\\ x+y-2z &= 4\\ x-2y+8z &= 6 \end{aligned}$$





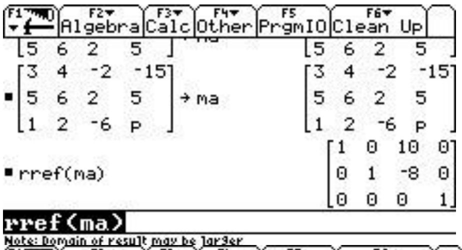
$$L = \begin{pmatrix} 14/3 \\ -2/3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 30 \\ 3 \end{pmatrix}, r \epsilon R,$$



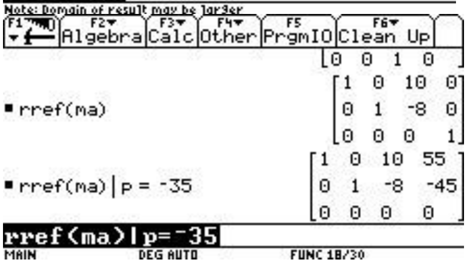
wobei der Richtungsvektor (und nur der Richtungsvektor mit dem Hauptnenner der Brüche multipliziert wurde.

Etwas komplizierter wird die Lösung linearer Gleichungssysteme, wenn sie außer den Variablen noch Parameter enthalten. Beispiel:

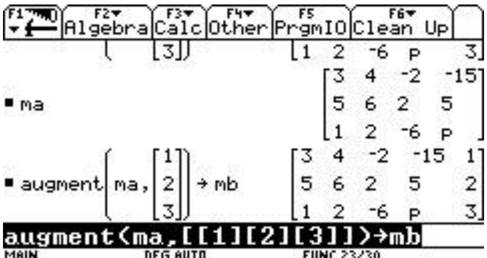
$$\begin{aligned} 3x + 4y - 2z &= -15 \\ 5x + 6y + 2z &= 5 \\ x + 2y - 6z &= p \end{aligned}$$



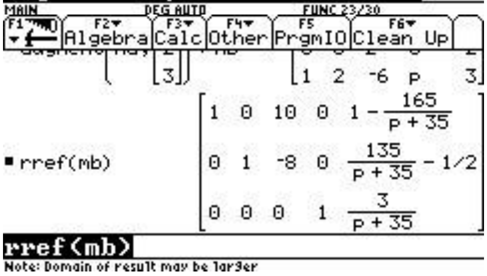
Sowohl der Equation-Solver als auch der rref-Befehl finden keine Lösung. Das händische Verfahren führt auf:



x	y	z		
3	4	-2	-15	*5 *1
5	6	2	5	*(-3)
1	2	-6	p	*(-3)
3	4	-2	-15	
0	2	-16	-90	*1
0	-2	16	-15-3p	*1
3	4	-2	-15	
0	2	-16	-90	
0	0	0	-105-3p	



Offenbar liegt für p= -35 der Sonderfall einer einparametrigen Lösungsmenge vor.



Durch Hinzufügen einer Kontrollspalte lassen sich die Sonderfälle erkennen. Sie ergeben sich aus den Nennern der Brüche in der Kontrollspalte:

Hinweis: Die Kontrollspalte muss so gewählt werden, dass sie nicht als Kombination aus den beiden ersten Spalten darstellbar ist. Die Hinzufügung der Spalte $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ führt nicht auf die Lösung, weil gilt: $-1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$