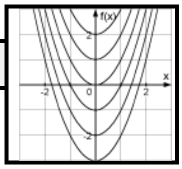
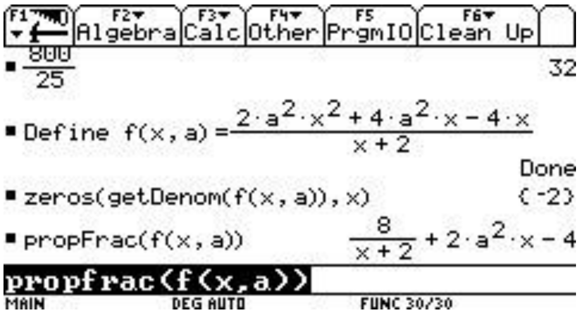
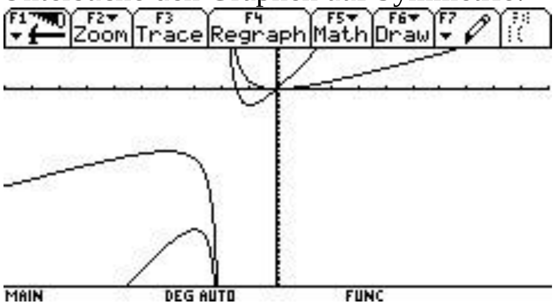
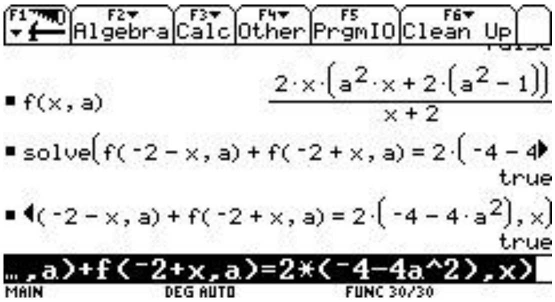
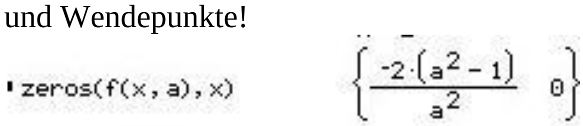
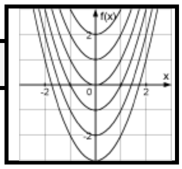
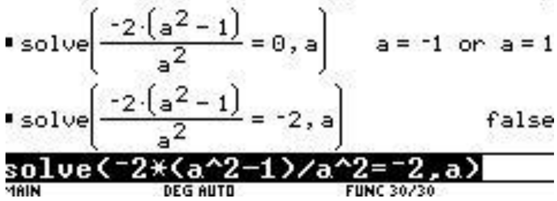
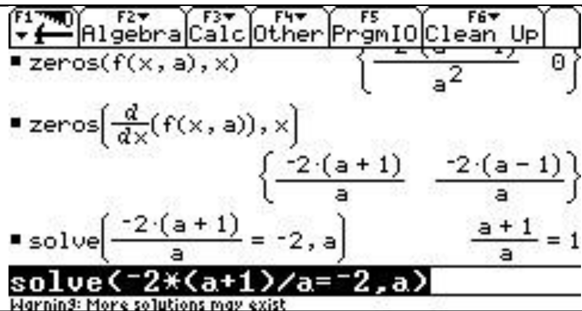
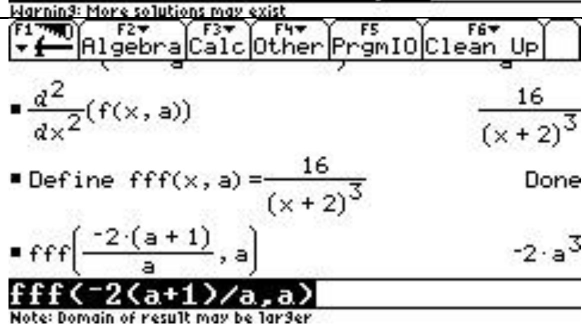
Analysis mit dem Voyage 1



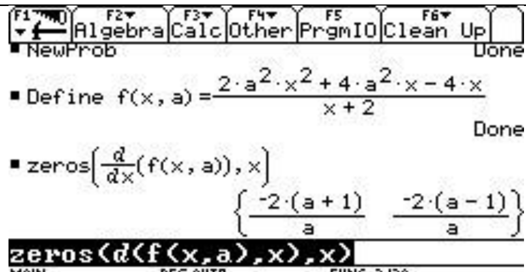
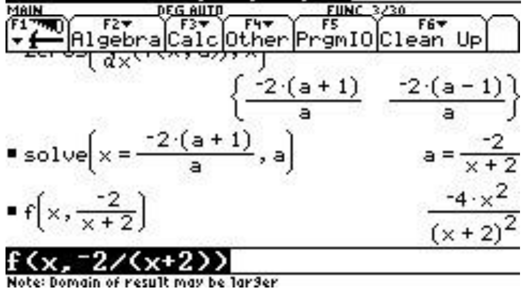
1. Kurvendiskussion

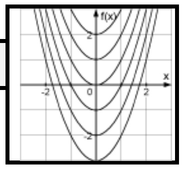
Gegeben ist die Funktionschar	$f_a(x) = \frac{2a^2x^2 + 4a^2x - 4x}{x+2}; a \in \Re \setminus \{0\}$
Den Nenner erhält man mit Hilfe der Funktion getDenom. Zeros liefert die Nullstellen des Nenners und damit die Werte, die aus dem Definitionsbereich auszuschließen sind: $D_{rf} = \Re \setminus \{-2\}$ PropFrac teilt die Funktion in den ganzrationalen und den gebrochen-rationalen Anteil. Der ganzrationale Anteil ist gleichzeitig die schräge oder waagrechte Asymptote, hier $y=2a^2x-4$ Im gebrochen-rationalen Anteil kann man die Art der Definitionslücke ablesen: Es handelt sich um eine einfache Nullstelle im Nenner. Also liegt eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel vor. Da der Parameter a im Nenner nicht auftaucht, besitzen alle Graphen der Schar diese Polstelle und die senkrechte Asymptote x=-2	Bestimme die Definitionslücke, die Art der Definitionslücke und die Asymptoten! 
Ein Blick auf die Graphen (der Bildschirm zeigt die Graphen für a=1 und a=2 zeigt, dass hier höchstens Punktsymmetrie vorliegen kann, und zwar nicht zu Ursprung, sondern zum Schnittpunkt der beiden Asymptoten. $y=2*a^2*(-2)-4=-4-4a^2$ Das mögliche Symmetriezentrum ist also $\left(-2 \middle\vert -4-4a^2\right)$. Punktsymmetrie zu einem Punkt (b|f(b)) liegt vor, wenn gilt: $\frac{f(b-x)+f(b+x)}{2} = f(b)$ (Wenn man zwei Funktionswerte betrachtet, die gleichweit von b entfernt sind, ergibt sich als Mittelwert der Funktionswert an der Stelle b). Diese Gleichung wird für die Schar überprüft. Damit ist der Punktsymmetrie zum Punkt $\left(-2 \middle\vert -4-4a^2\right)$ nachgewiesen	Untersuche den Graphen auf Symmetrie!  
Die Nullstellen erhält mit Zeros. Sie liegen hier bei 0 und $\frac{-2(a^2-1)}{a^2}$. Nun muss erstens überprüft werden, für welche a die variable Nullstelle auf die feste Nullstelle Null fällt. Dies ist hier für a=-1 und	Untersuche $f_a(x)$ auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte! 



a=1 der Fall. Außerdem ist bei rationalen Funktionen zu prüfen, für welche a die variable Nullstelle auf die Definitionslücke fällt. Dies ist hier nicht der Fall. Dies Ergebnis liefert einen ersten Hinweis für die Klassifikation der Schar (eine Nullstelle für a=± 1, zwei Nullstellen für a$\neq \lvert 1 \rvert$).	
Die Extrema erhält man als Nullstellen der ersten Ableitung: Mögliche Extremstellen liegen bei $\frac{-2\cdot(a+1)}{a}$ und $\frac{-2\cdot(a-1)}{a}$. Es wird geprüft, ob eine dieser Nullstellen auf die Definitionslücke fällt. Das ist hier nicht der Fall.	
Die zweite Ableitung wird gebildet, um die hinreichende Bedingung und die Art der Extremstellen zu überprüfen. Die erste mögliche Extremstelle wird eingesetzt. Der Term $-2a^3$ ist negativ für positive a und positiv für negative a. Es liegt also ein Hochpunkt bei $\frac{-2\cdot(a+1)}{a}$ für a>0 und ein Tiefpunkt für a<0. Wegen der Punktsymmetrie gilt das Gleiche für die andere mögliche Extremstelle. Da die zweite Ableitung keine Nullstellen hat, gibt es keine Wendepunkte.	

2. Ortslinien

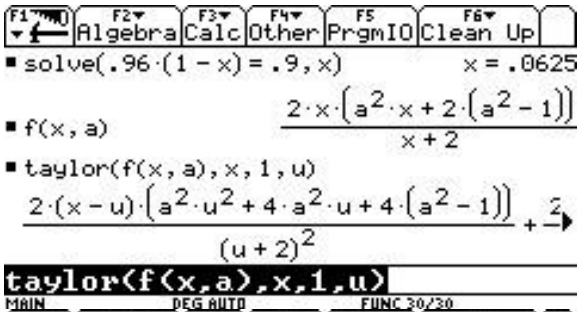
Gegeben sei die Funktionenschar $f_a(x)=\frac{2a^2x^2+4a^2x-4x}{x+2}; a\in\Re\setminus\{0\}$ Ermittle die Ortslinie der Extrempunkte! Die erste Extremstelle liegt bei $x=\frac{-2\cdot(a+1)}{a}$. Diese Gleichung für die Extremstelle (oder Wendestelle) wird nach a aufgelöst und das Ergebnis für a in die ursprüngliche Funktionsgleichung einsetzt. Das ergibt die Gleichung der Ortslinie: $y=\frac{-4x^2}{(x+2)^2}$	 

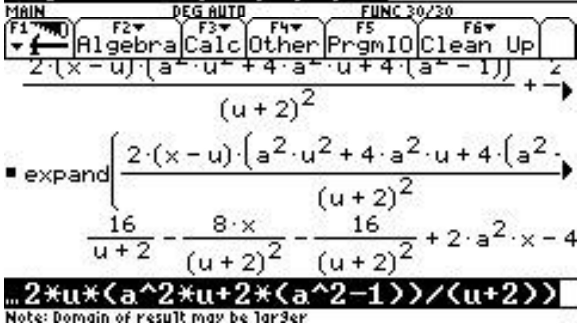


3. Tangenten

Einzelne Tangenten erhält man im Grafikmodus mit dem Befehl „F5 A: tangent“.
Sucht man eine Tangente an einer Schar oder eine Gleichung für alle Tangenten eines Graphen, kann man die allgemeine Tangentenformel verwenden:
$t(x) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$, wobei x_0 die Stelle ist, an der die Tangente angelegt wird.
Diese allgemeine Tangente ist als Taylorpolynom 1. Ordnung in den Voyage einprogrammiert (F3 9:taylor). Dabei sind folgende Parameter anzugeben:
Taylor(Funktion, Variable, Grad [für Tangente immer 1], Stelle).
Das Ergebnis ist mit expand (F2 3) zu vereinfachen.
Die allgemeine Tangente an der Stelle u ist also

$$t(x) = \left(2a^2 - \frac{8}{(u+2)^2}\right)\cdot x + \frac{16}{u+2} - \frac{16}{(u+2)^2} - 4$$

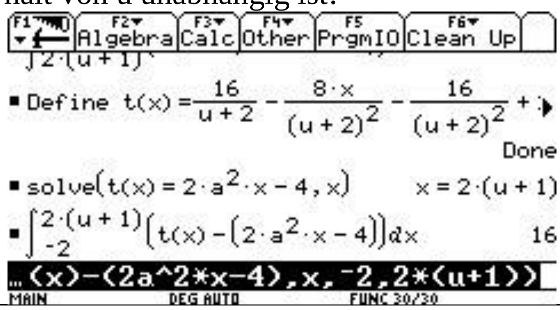




4. Flächenberechnungen und eingeschlossene Dreiecke

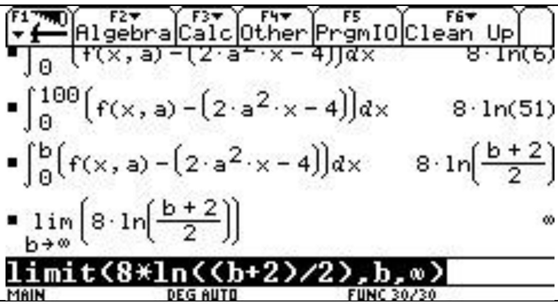
Tangente und Asymptote sind jeweils Geraden, die sich in einem Punkt schneiden, wenn sie unterschiedliche Steigung haben. Die Gerade mit der Gleichung x=-2 ist eine Senkrechte. Gesucht ist also das Integral über der Differenzfunktion von Tangente und Asymptote von –2 bis zum Schnittpunkt.
Zur einfacheren Handhabung wird die Tangente als Funktion t(x) definiert.
Der Schnittpunkt zwischen Tangente und Asymptote liegt bei 2*(u+1).
Das Integral von –2 bis zum Schnittpunkt über der Differenzfunktion ergibt 16 FE.

Zeige, dass die Tangente in jedem Punkt $P(u\,|\,f_a(u))$ des Graphen von f_a, die Asymptote und die Gerade mit der Gleichung $x = -2$ ein Dreieck bilden, dessen Flächeninhalt von u unabhängig ist!



Alle Graphen der Schar verlaufen durch den Ursprung. Für x>0 verläuft die schräge Asymptote unterhalb des Graphen der Funktion. Da die Asymptote in diesem Bereich den Funktionsgraphen nicht schneidet, liegt eine unbegrenzte Fläche vor.
Es wird deshalb zunächst die Maßzahl der Fläche zwischen Graph und Asymptote im Bereich von 0 bis b berechnet

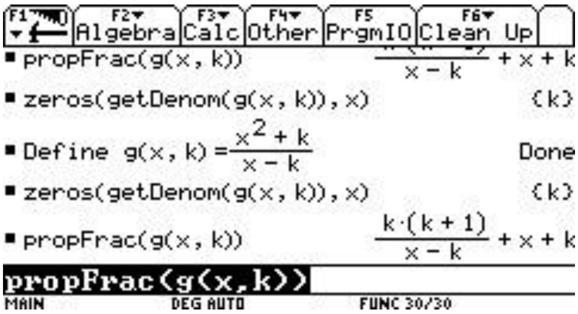
Berechne die Maßzahl der Fläche, die durch den Graphen von f_a, die negative y-Achse und den Graphen der Asymptotenfunktion g_A begrenzt wird!

<table>
<tr>
<td>$A(b) = 8 \cdot \ln\left(\frac{b+2}{2}\right)$ und dann der Grenzwert für $b \to +\infty$. Die Fläche ist nicht endlich.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

5. Klassifizierung von Funktionsscharen

<table>
<tr>
<td>Bei der Untersuchung von rationalen Funktionenscharen tritt häufig das Phänomen auf, dass einzelne Graphen der Schar hebbare Definitionslücken statt senkrechter Asymptoten besitzen. Zur Identifizierung dieser Sonderfälle bietet sich der Befehl PropFrac an.

Die Definitionslücke liegt bei k. Also ist der Definitionsbereich $D_f = \Re \setminus \{k\}$.
Der gebrochen-rationale Anteil ist $\frac{k \cdot (k+1)}{x-k}$.
Für k=0 und für k=-1 ist der Zähler des gebrochen-rationalen Terms Null. Dann fällt der gebrochen-rationale Anteil weg (und damit auch die senkrechte Asymptote) und es bleibt eine Gerade mit hebbarer Definitionslücke bei k übrig.
Die Graphen der Schar lassen sich also in zwei Sonderfälle und drei Gruppen einteilen: k < -1; k=-1; -1<k<0; k=0 und k>0.</td>
<td>Klassifiziere die Funktionenschar
$g_k(x) = \frac{x^2+k}{x-k}$!

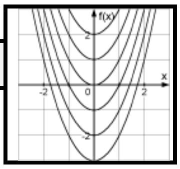

</td>
</tr>
</table>

6. Einschränkungen des Voyage

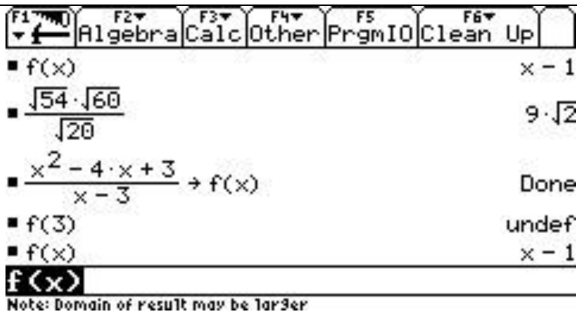
<table>
<tr>
<td>Der Voyage sucht bei Lösungsmengen nur dann nach Wurzeln aus negativen Parametern, wenn keine positiven Wurzeln gefunden werden.
So wird die Gleichungen $x^2 - k = 0$ und $x^2 + k = 0$ richtig gelöst.
Bei der Gleichung $x^4 - k^2 = 0$ werden aber die beiden Lösungen $\pm\sqrt{-k}$ nicht erkannt, da die Lösungen $\pm\sqrt{k}$ gefunden wurden.</td>
<td>solve (x^2-k=0,x)

solve (x^2+k=0,x)
x = plus/minus Wurzel minus k
solve(x^4-k^2=0,x)
x = plus/minus Wurzel k

Immer dann, wenn ein Parameter quadratisch auftritt, darf man sich nicht verlassen, dass der Voyage alle Lösungen findet.</td>
</tr>
</table>



Der Voyage fasst nicht nur Zahlen zusammen und macht den Nenner möglichst rational, sondern auch Terme mit Variablen. So wird auch durch Linearterme wie (x-3) gekürzt, ohne dass der Hinweis $x \neq 3$ erfolgt. In der Mitteilungzeile erscheint nur kurz der Hinweis: „Domain of result may be larger“ (Der Definitionsbereich des Ergebnisses kann größer sein).

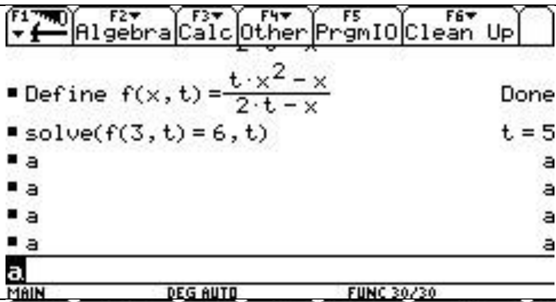


7. Grundprobleme für Funktionscharen (nach Lambacher Schweizer, Zentralabitur 2010)

Problem 1: Für welchen Wert von t geht $f_t(x)$ durch P?

Beispiel $f_t(x) = \frac{t \cdot x^2 - x}{2t - x}$:, P(3|6)

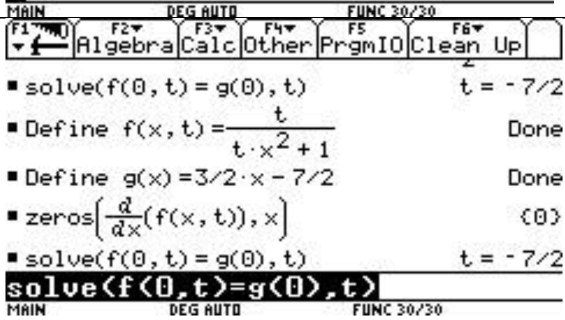
In die Gleichung $f_t(x) = y$ werden die Koordinaten von P für x und y eingesetzt. Auflösung nach t ergibt die Lösung.



Problem 2: Für welchen Wert von t liegt der Hochpunkt der Graphen der Funktion $f_t(x)$ auf der Geraden g?

Beispiel: $f_t(x) = \frac{t}{t \cdot x^2 + 1}$, $g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$

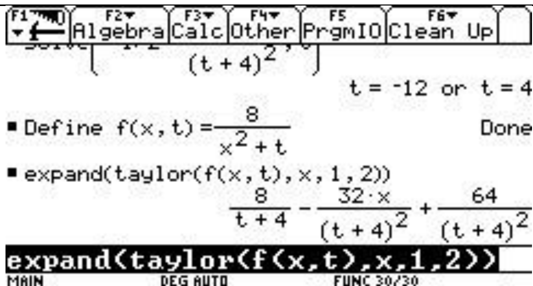
Die Berechnung der Extremstellen zeigt, dass die Extremstellen alle an der Stelle 0 liegen. Die Funktionenschar und die Gerade schneiden sich für $t = -\frac{7}{2}$ an der Stelle 0.

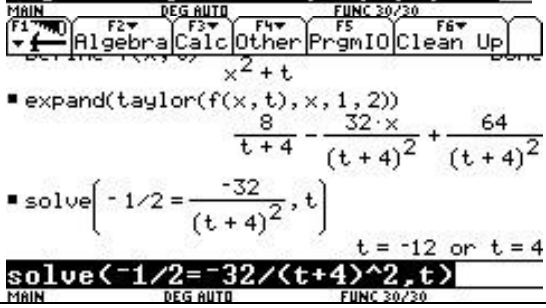


Problem 3: Für welchen Wert von t ist die Tangente an die Funktion $f_t(x)$ an der Stelle x_0 parallel zur Geraden g?

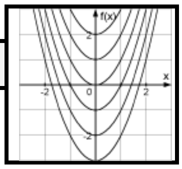
Beispiel: $f_t(x) = \frac{8}{x^2 + t}$; $g(x) = -\frac{1}{2}x - 5$; $x_0 = 2$.

Die Tangente erhält man als Taylorpolynom 1. Grades an der Stelle 2. Zur besseren Übersicht führt man ein Expand durch.





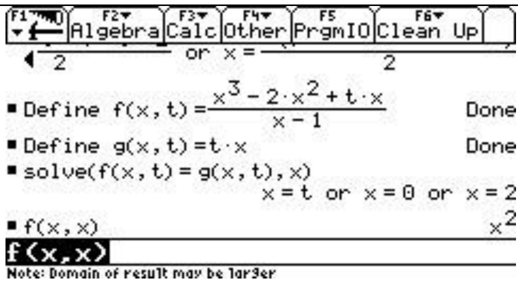
Die Tangente ist parallel zur Geraden g, wenn die Steigungen übereinstimmen.
Die Lösungen sind t=-12 und t=4.



Gegeben sind die Funktionen $g_t(x) = t \cdot x$ und $f_t(x) = \frac{x^3-2x^2+k\cdot x}{x-1}$.
Ermitteln Sie, für welche Werte von t die Graphen von $g_t(x)$ und $f_t(x)$ genau drei Schnittpunkt besitzt. Ermitteln Sie ggf. die Ortsline der Funktion der Schnittpunkte.
Für die Auswertung ist zu prüfen, ob die variable Schnittstelle bei x=t

a) auf eine der festen Nullstellen oder
b) auf eine der Definitionslücken fällt

Der Ortslinie der variablen Schnittpunkte ist $y = x^2$.



Für t=0 und für t=2 gibt es nur zwei Schnittpunkte, weil die variable Schnittstelle auf eine feste Schnittstelle fällt.
Für t=-1 gibt es ebenfalls nur zwei Schnittpunkte, weil die variable Schnittstelle in die Definitionslücke fällt.